سیمین افروزان، دبیر ریاضی شهر تهران

مشتق‌گیری ضمنی از روابطی که تابع نیستند

مقدمه

مقدمهٔ ورود به حساب دیفرانسیل و انتگرال، تابع‌ها هستند که در کتاب حسابان به آن‌ها پرداخته شده است. شناسایی تابع‌ها مبحث مهمی در این کتاب است و در این زمینه سؤالات و تست‌های متنوعی طراحی شده‌اند. در کتاب‌های «حسابان» و «حساب دیفرانسیل و انتگرال»، روند کار برای رسیدن به یکی از اهداف درس چنین است: شناخت تابع‌ها، به دست آوردن حد تابع‌ها، محاسبهٔ مشتق آن‌ها به عنوان نوع خاصی از حد و کاربرد مشتق در مسائل بهینه‌سازی تابع‌هایی که در مسائل مختلف اقتصاد، فیزیک، هندسه و غیره مطرح می‌شوند. بنابراین شناخت تابع‌های حقیقی یک متغیره که موضوع مباحث مذکور هستند، از اهمیت بسیاری برخوردار است.

در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال روابطی در مبحث مشتق‌گیری ضمنی مطرح شده‌اند که هیچ کدام تابع نیستند. این درس سؤالات و ابهامات بسیاری را در ذهن خواننده ایجاد می‌کند. چه‌طور از روابطی که تابع نیستند، مشتق می‌گیریم؟ برخی از این‌گونه روابط مانند دایره را نمی‌توان حتی در قسمتی از دامنه‌شان تابع در نظر گرفت. آیا همان‌طور که در کتاب دیفرانسیل ذکر شده است، می‌توانیم همواره در معادله داده شده y را به طور ضمنی تابع مشتق‌پذیری از x فرض کنیم و در هر نقطهٔ دلخواه مشتق بگیریم؟ چرا بحث مشتق‌گیری ضمنی که نتیجهٔ قاعدهٔ زنجیره‌ای است و تنها به این‌گونه رابطه‌ها اختصاص ندارد، در این مبحث مطرح شده است؟ چگونه و با چه مجوزی می‌توان از این رابطه‌ها مشتق گرفت؟

قاعدهٔ زنجیره‌ای و مشتق تابع‌های ضمنی

معادلهٔ یک تابع حقیقی به شکل $y=f(x)$ در صفحهٔ xy، معادله‌ای است که به‌طور صریح رابطهٔ y را بر حسب متغیرش (x) بیان می‌کند. این معادله را می‌توان به شکل ضمنی $F(x,f(x))=F(x,y)=y-f(x)=۰$ نیز بیان کرد. همچنین تابع‌هایی وجود دارند که نمی‌توان و یا به سختی می‌توان آن‌ها را به‌طور صریح برحسب متغیر بیان کرد.

برای به‌دست آوردن مشتق توابعی که به‌صورت ضمنی $F(x,y)=۰$ بیان می‌شود، باید از طرفین تساوی مشتق بگیریم و برای مشتق ترکیبات y، چون y تابعی از x است، از قاعدهٔ زنجیره‌ای استفاده کنیم.

$$(y^n)'=ny^{n-۱}y',(\sin y)'=y'\cos y,$$

$$\sin^n y=ny'\cos y.\sin^{n-۱}y,(\frac{۱}{y})'=-\frac{y'}{y^۲},...$$

مشتق‌گیری ضمنی از تابع‌های ضمنی مطلبی است که بهتر است به‌عنوان مثال‌هایی برای قاعدهٔ زنجیره‌ای در کتاب حسابان مطرح شود تا تکلیف مشتق تابع‌هایی که نمی‌توان و یا به سختی می‌توان y را برحسب x نوشت، مشخص شود. از قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌توان برای محاسبهٔ مشتق تمام معادلاتی که یک تابع را معرفی می‌کنند، استفاده کرد.

● **مثال ۱.** مشتق تابع $y-x^۳=۲x$ عبارت است از:

$$y'-۳x^۲=۲\rightarrow y'=۳x^۲+۲$$

● **مثال ۲.** مشتق تابع $y^۳+y-۳x^۲=۰$ عبارت است از:

$$۳y^۲y'+y'-۶x=۰\rightarrow y'(۳y^۲+۱)=۶x$$

$$\rightarrow y'=\frac{۶x}{۳y^۲+۱}$$

● **مثال ۳.** مشتق تابع $xy+۵x^۲=۱$ عبارت است از:

$$y+xy'+۱۰x=۰\rightarrow y'=-\frac{y+۱۰x}{x}$$

به‌عنوان مثالی برای کاربرد مشتق‌گیری ضمنی از توابع ضمنی، می‌توان به‌دست آوردن مشتق تابع وارون را ذکر کرد. اگر دو تابع f و g معکوس یکدیگر باشند، ترکیب آن‌ها در زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ g، تابع همانی است:

$$fog(x)=x\rightarrow g'(x)f'(g(x))=۱$$

$$\to g'(x) = \frac{۱}{f'(g(x))} \quad (❊)$$

بنابراین، به‌عنوان مثال، مشتق تابع نمایی طبیعی را می‌توان پس از محاسبهٔ مشتق تابع لگاریتم طبیعی با استفاده از تعریف مشتق، به کمک فرمول (❊) به‌دست آورد. اگر: $f(x)=\ln x$ و $g(x)=e^x$، در این صورت:

$$g'(x) = \frac{۱}{f'(g(x))} \xrightarrow{f'(x)=\frac{۱}{x}} g'(x) = \frac{۱}{\frac{۱}{g(x)}}$$
$$= g(x) = e^x$$

همچنین با استفادهٔ مستقیم از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$(y = e^x)' = ? \xrightarrow{y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y} (x = \ln y)' = ?$$
$$\to ۱ = \frac{y'}{y} \to y' = y = e^x$$

یا بر عکس، با استفاده از تعریف مشتق، ابتدا می‌توان مشتق تابع نمایی طبیعی را به‌دست آورد و سپس به کمک فرمول (❊) مشتق تابع لگاریتمی طبیعی را محاسبه کرد. همچنین، بدون استفاده از فرمول مذکور با مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$(y = \ln x)' = ? \xrightarrow{y=\ln x \Leftrightarrow x=e^y} (x = e^y)' = ?$$
$$\to ۱ = y'e^y \to y' = \frac{۱}{e^y} = \frac{۱}{x}$$

مشتق روابط ضمنی که تابع نیستند

رابطهٔ ضمنی $F(x,y)=۰$ همواره شامل یک تابع یک متغیره نیست که به طور غیرصریح تعریف شده است. برای مثال، رابطهٔ $F(x,y)=x^۲+y^۲-۴=۰$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ است. این رابطه به هر x در دامنهٔ $(-۲\leq x\leq ۲)$ دو y، $y=\pm\sqrt{۴-x^۲}$ را متناظر می‌کند. به‌طور کلی، معادلهٔ $F(x,y)=۰$ یک منحنی مسطح در صفحه را مشخص می‌کند. هرچند این منحنی ممکن است تابع نباشد، ولی وجود مماس در نقاط هموار آن امری بدیهی و انکارناپذیر است و وجود مماس غیرعمودی به معنی مشتق‌پذیری در آن نقاط است. برای محاسبهٔ شیب مماس در این نقاط لازم است مشتق تابع‌هایی را بیابیم که در این‌گونه روابط نهفته‌اند و وجود چنین مماس‌هایی را تضمین می‌کنند.

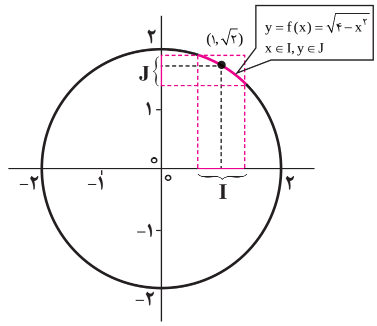
حالت خاص قضیهٔ تابع ضمنی در کتاب‌های آنالیز دانشگاهی شرایطی را بیان می‌کند که تحت آن شرایط می‌توان رابطهٔ $F(x,y)=۰$ را به‌طور موضعی به صورت یک تابع یکتای مشتق‌پذیر توصیف کرد. چون ابزارهای لازم در دبیرستان برای بیان این قضیه وجود ندارد، به علت نیاز به مشتق‌گیری از این روابط، به‌خصوص در مبحث مقاطع مخروطی، لازم است به بیان شهودی این قضیه اکتفا کنیم تا به سؤالات و ابهامات به‌وجود آمده پاسخ گوییم.

معادلهٔ دایرهٔ $F(x,y)=x^۲+y^۲-۴=۰$ را در نظر بگیرید. این معادله، یک تابع نیست و حتی اگر محدوده خاصی برای x در دامنه- $D=\{x\in R|-۲\leq x\leq ۲\}$ - در نظر بگیریم، yهای متناظر، تابعی از x نخواهند بود. دایره منحنی مسطح همواری است که در هر نقطهٔ دلخواه آن می‌توان یک خط مماس رسم کرد. دایره در تمام نقاطش غیر از دو نقطه از آن‌که خط مماس موازی محور yها است، مشتق‌پذیر است.

تغییر نگرش و نگاه موضعی به رابطهٔ دایره

وقتی به دایرهٔ $F(x,y)=x^۲+y^۲-۴=۰$ به‌عنوان رابطه‌ای برحسب متغیر x نگاه کنیم، $y^۲=۴-x^۲$ که $D=\{x\in R|-۲\leq x\leq ۲\}$، حتی در زیرمجموعه‌ای از دامنه، یک تابع نخواهیم داشت. اگر بخواهیم از مشتق‌پذیری و شیب مماس در یک نقطه از دایره صحبت کنیم، باید معادلهٔ دایره را به‌صورت یک رابطهٔ دو متغیره ببینیم. در

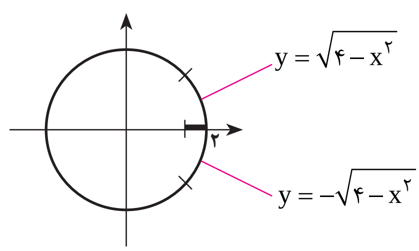
این صورت، دامنه $D=\{(x,y)\in R\times R|-۲\le x\le ۲,-۲\le y\le ۲\}$ خواهـد بود. با محدود کردن دامنه حـول یک نقطه از آن می‌توان به‌طور موضعی از رابطهٔ دایره به تابعی از x رسید. در واقع، هم x و هم y را محدود می‌کنیم تا قسـمتی از دایـره را به‌عنوان یک تابع یـک متغیره در مجاورت یک نقطه معرفی کنیم.



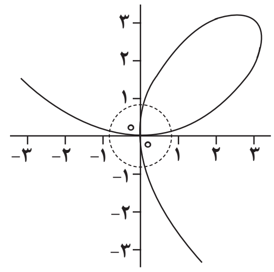
به‌طور کلـی، معادلهٔ دو متغیـره $F(x,y)=۰$ معادلهٔ یک منحنی مسطح است و وجود مماس در نقطهٔ هموار $(x_۰,y_۰)$ از دامنهٔ آن ایجاب می‌کند که بخش مناسـبی از منحنی را که حول نقطهٔ مذکور قرار دارد، به عنوان تابعی از x (یا y) جدا کنیم و نگاهی موضعی به معادله داشـته باشیم.

لازم به ذکر است که بر خلاف آنچه در کتاب «حساب دیفرانسـیل و انتگرال» سـال چهارم ذکر شده است، در معادلات ضمنی همواره نمی‌توانیم در معادله داده شـده y را به طور ضمنی تابع مشتق‌پذیری از x فرض کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

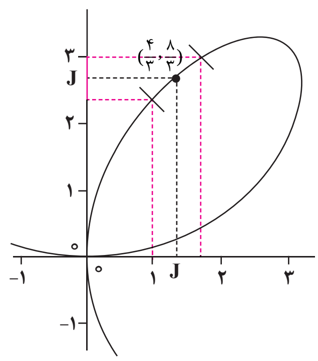
● **مثـال۱.** معادلهٔ $x^۲+y^۲-۴=۰$ در مجاورت نقطهٔ $(۲,۰)$ حاوی یک تابع یکتای مشتق‌پذیر نیست.



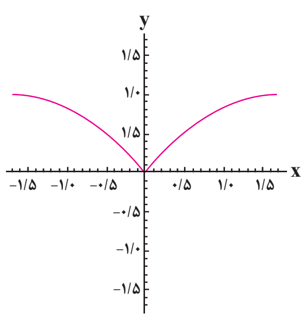
● **مثـال۲.** $(۰,۰)$ یک جواب معادلـهٔ $x^۳+y^۳-۶xy=۰$، (منحنی برگی **دکارت**) اسـت. این رابطه در مجاورت مبدأ حاوی یک تابع یکتا نیست.



امـا حول بقیهٔ نقـاط دامنه، مانـنـد نقطهٔ $(\frac{۴}{۳},\frac{۸}{۳})$، متضمن یک تابع یکتای مشتق‌پذیر است.



● **مثال۳.** فرض کنید: $F(x,y)=x^۲-y^۳=۰$.



این معادله به‌عنوان یک رابطهٔ یک متغیره برحسب x معادلهٔ یک تابع اسـت و همچنین به‌عنوان یک رابطهٔ دو متغیـره در مجاورت هر نقطـهٔ دلخواه در دامنه، یک تابـع یکتـا را توصیف می‌کند، اما در مبدأ مشـتق‌پذیر نیست. توابعی که در برخی از نقاط دامنه‌شان مشتق‌پذیر نیستند، اگر به صورت ضمنی بیان شوند، مثال‌های نقض دیگری بر این مطلب هسـتند که: «همواره معادله داده شـده y را به طور ضمنی بر حسب تابعی مشتق‌پذیر از x تعریف می‌کند.» (کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال سال چهارم، مبحث مشتق‌گیری ضمنی).